# INTEGRALI DOPPI

Esercizi svolti

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

   (a) $\displaystyle\int_A xy\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\};$

   (b) $\displaystyle\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : 3 \le x \le 4, 1 \le y \le 2\};$

   (c) $\displaystyle\int_A (2x^2 + 3y)\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\};$

   (d) $\displaystyle\int_A (x - 2y)\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 - x\};$

   (e) $\displaystyle\int_A xy\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1 + x\};$

   (f) $\displaystyle\int_A (x + y)\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : 2x^3 \le y \le 2\sqrt{x}\};$

   (g) $\displaystyle\int_A \frac{\sin y}{y}\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le \pi,\ x \le y \le \pi\};$

   (h) $\displaystyle\int_A (x + 2y)\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, \min\{x^2, x\} \le y \le \max\{x^2, x\}\};$

   (i) $\displaystyle\int_A x \sin|x^2 - y|\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\};$

   (j) $\displaystyle\int_A |\sin x - y|\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1\};$

   (k) $\displaystyle\int_A x^2\, dx\, dy\,,\ A = \{(x, y) : y \le -x^2 + x/2 + 3, y \ge -x^2 - x, y \ge -x^2 + 2x\}.$

2. Sia $A$ la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (1, 1)$ e $A_3 = (2, 0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di $A$ rispetto al vertice $A_1$.

3. Sia $B$ la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (0, 1)$ e $B_3 = (1, 0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di $B$ rispetto al vertice $B_3$.

4. Calcolare il baricentro delle regioni di piano dotate di densità unitaria

   (a) $A = \{(x, y) : x^2 \le y \le 1\};$

   (b) $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}.$

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

   (a) $\displaystyle\int_D y^2\, dx\, dy\,, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\};$

   (b) $\displaystyle\int_D x^2 + y^2\, dx\, dy\,, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le y \le x\};$

   (c) $\displaystyle\int_D x^2\, dx\, dy\,, \quad D = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\};$

(d) $\displaystyle\int_D y\, dx\, dy\,, \quad D = \{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 36,\ y \geq 0\}.$

6. Sia $D$ un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in $C = (r, 0)$ e raggio $r$. Verificare la relazione $I_0 = I_C + r^2 A$, dove $I_0$ e $I_C$ sono i momenti di inerzia di $D$ rispetto a $O$ e a $C$ e $A$ è l'area di $D$.

7. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$.

8. Calcolare i seguenti integrali impropri:

(a) $\displaystyle\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha}\, dx\ dy\,,\ D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2\};$

(b) $\displaystyle\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)}\, dx\, dy\,,\ D = \{(x,y) : 4 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\};$

(c) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy\,,\ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\};$

(d) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)}\, dx\, dy\,,\ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\};$

(e) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy\,,\ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}.$

**INTEGRALI DOPPI**

Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\displaystyle\int_A xy\,dx\,dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

È possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.
Integrando per verticali si ottiene

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\,dy\right) dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(b) $\displaystyle\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy\,,\ A = \{(x, y) : 3 \le x \le 4, 1 \le y \le 2\}$.

È possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.
Integrando per orizzontali si ottiene

$$\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\right) dy = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_3^4 dy =$$
$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{4+y} + \frac{1}{3+y}\right) dy = [-\log(4+y) + \log(3+y)]_1^2 = \ln\left(\frac{25}{24}\right).$$

(c) $\displaystyle\int_A (2x^2+3y)\,dx\,dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$.

La regione $A$ è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.
Integrando per verticali si ottiene

$$\int_A (2x^2+3y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 (2x^2+3y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[2x^2y + \frac{3}{2}y^2\right]_{x^2}^1 dx =$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{7}{2}x^4 + 2x^2 + \frac{3}{2}\right) dx = \left[-\frac{7}{10}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x\right]_0^1 = \frac{22}{15}.$$

(d) $\displaystyle\int_A (x-2y)\,dx\,dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2-x\}$.

La regione $A$ è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.
Integrando per orizzontali si ottiene

$$\int_A (x-2y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-y} (x-2y)\,dx\right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} - 2xy\right]_0^{2-y} dy =$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{5}{2}y^2 - 6y + 2\right) dy = \left[\frac{5}{6}y^3 - 3y^2 + 2y\right]_0^2 = -\frac{4}{3}.$$

(e) $\displaystyle\int_A xy\,dx\,dy\,,\ A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1+x\}$.

La regione $A$ è sia orizzontalmente che verticalmente convessa, ma per la forma esplicita di $A$ è più conveniente integrare per verticali. Si ha quindi

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{1+x} xy\,dy\right) dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1+x} dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (-x^5 + x^3 + 2x^2 + x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{8}.$$

(f) $\displaystyle\int_A (x+y)\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y): 2x^3\le y\le 2\sqrt{x}\}.$

La regione $A$ è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per orizzontali risulta

$$\int_A (x+y)\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_{(y/2)^2}^{(y/2)^{1/3}}(x+y)\,dx\right)dy = \int_0^2\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{(y/2)^2}^{(y/2)^{1/3}}dy =$$

$$= \int_0^2\left(-\frac{x^4}{32}-\frac{y^3}{4}+\frac{y^{2/3}}{2^{5/3}}+\frac{y^{4/3}}{2^{1/3}}\right)dy = \left[-\frac{y^5}{5\cdot 32}-\frac{y^4}{16}+\frac{3y^{5/3}}{5\cdot 2^{5/3}}+\frac{3y^{7/3}}{7\cdot 2^{1/3}}\right]_0^2 = \frac{39}{35}.$$

(g) $\displaystyle\int_A \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y): 0\le x\le\pi,\ x\le y\le\pi\}.$

Sebbene la regione $A$ sia verticalmente e orizzontalmente convessa, non è possibile calcolare esplicitamente l'integrale per verticali, infatti la funzione $(\sin y)/y$ non è integrabile elementarmente rispetto a y. Integrando per orizzontali si ottiene invece

$$\int_A \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^\pi\left(\int_0^y\frac{\sin y}{y}\,dx\right)dy = \int_0^\pi \sin y\,dy = [-\cos y]_0^\pi = 2.$$

(h) $\displaystyle\int_A (x+2y)\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y): 0\le x\le 2, \min\{x^2,x\}\le y\le\max\{x^2,x\}\}.$

L'insieme $A$ può essere visto come l'unione dei due insiemi

$$A_1=\{(x,y): 0\le x\le 1, x^2\le y\le x\},\qquad A_2=\{(x,y): 1\le x\le 2, x\le y\le x^2\}$$

la cui intersezione si riduce ad un punto delle relative frontiere. Possiamo quindi decomporre l'integrale secondo:

$$\int_A (x+2y)\,dx\,dy = \int_{A_1}(x+2y)\,dx\,dy + \int_{A_2}(x+2y)\,dx\,dy$$

dove entrambi gli integrali a secondo membro possono essere risolti integrando per verticali. Si ha

$$\int_{A_1}(x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{x^2}^x(x+2y)\,dy\right)dx = \int_0^1[xy+y^2]_{x^2}^x\,dx =$$

$$= \int_0^1(2x^2-x^3-x^4)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{13}{60}$$

e

$$\int_{A_2}(x+2y)\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_x^{x^2}(x+2y)\,dy\right)dx = \int_1^2[xy+y^2]_x^{x^2}\,dx =$$

$$= \int_1^2(-2x^2+x^3+x^4)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{317}{60}$$

Quindi

$$\int_A (x+2y)\,dx\,dy = \frac{13}{60}+\frac{317}{60} = \frac{11}{2}.$$

(i) $\displaystyle\int_A x\sin|x^2-y|\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}.$

Poichè

$$\sin|x^2-y| = \begin{cases}\sin(x^2-y) & \text{se}\quad y\le x^2\\ \sin(y-x^2) & \text{se}\quad y>x^2,\end{cases}$$

si ha

$$\int_A x\sin|x^2-y|\,dx\,dy = \int_{A_1}x\sin(x^2-y)\,dx\,dy + \int_{A_2}x\sin(y-x^2)\,dx\,dy$$

dove

$$A_1=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\},\qquad A_2=\{(x,y): 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1\}$$

Integrando per verticali otteniamo

$$\int_{A_1} x\sin(x^2-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x\sin(x^2-y)\,dy\right)dx = \int_0^1 x[\cos(x^2-y)]_0^{x^2}\,dx =$$
$$= \int_0^1 (x - x\cos(x^2))\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\sin(x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 1$$

e

$$\int_{A_2} x\sin(y-x^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{1} x\sin(y-x^2)\,dy\right)dx = \int_0^1 x[-\cos(y-x^2)]_{x^2}^{1}\,dx =$$
$$= \int_0^1 (x - x\cos(1-x^2))\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin(1-x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 1$$

Quindi

$$\int_A (x+2y)\,dx\,dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 1 = 1 - \sin 1.$$

(j) $\displaystyle\int_A |\sin x - y|\,dx\,dy\,,\ A = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1\}.$

Poichè

$$|\sin x - y| = \begin{cases} \sin x - y & \text{se} \quad y \le \sin x \\ y - \sin x & \text{se} \quad y > \sin x, \end{cases}$$

si ha

$$\int_A |\sin x - y|\,dx\,dy = \int_{A_1} (\sin x - y)\,dx\,dy + \int_{A_2} (y - \sin x)\,dx\,dy$$

dove

$$A_1 = \{(x,y) : 0 \le x\pi, 0 \le y \le \sin x\}, \qquad A_2 = \{(x,y) : 0 \le x\pi, \sin x \le y \le 1\}$$

Integrando per verticali otteniamo

$$\int_{A_1} (\sin x - y)\,dx\,dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} (\sin x - y)\,dy\right)dx = \int_0^\pi \left[y\sin x - \frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin x} dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{4}$$

e

$$\int_{A_2} (y - \sin x)\,dx\,dy = \int_0^\pi \left(\int_{\sin x}^1 (y - \sin x)\,dy\right)dx = \int_0^\pi [\frac{y^2}{2} - y\sin x]_{\sin x}^1\,dx =$$
$$= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{4}(1-\cos 2x) - \sin x + \frac{1}{2}\right)dx =$$
$$= \left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}\sin 2x + \cos x\right]_0^\pi = \frac{3}{4}\pi - 2.$$

Quindi

$$\int_A |\sin x - y|\,dx\,dy = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi - 2 = \pi - 2.$$

(k) $\displaystyle\int_A x^2\,dx\,dy\,,\ A = \{(x,y) : y \le -x^2 + x/2 + 3, y \ge -x^2 - x, y \ge -x^2 + 2x\}.$

L'insieme $A$ può essere visto come l'unione dei due insiemi

$$A_1 = \{(x,y) : -2 \le x \le 0, -x^2 - x \le y \le -x^2 + x/2 + 3\},$$
$$A_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, -x^2 + 2x \le y \le -x^2 + x/2 + 3\}$$

aventi in comune solo punti delle relative frontiere. Possiamo quindi decomporre l'integrale secondo:

$$\int_A x^2\,dx\,dy = \int_{A_1} x^2\,dx\,dy + \int_{A_2} x^2\,dx\,dy$$

dove entrambi gli integrali a secondo membro possono essere risolti integrando per verticali.

Si ha

$$\int_{A_1} x^2 \, dx\, dy = \int_{-2}^{0} \left( \int_{-x^2-x}^{-x^2+x/2+3} x^2 \, dy \right) dx = \int_{-2}^{0} \left( \frac{3}{2} x^3 + 3x^2 \right) dx = \left[ \frac{3}{8} x^4 + x^3 \right]_{-2}^{0} = 2$$

e

$$\int_{A_2} x^2 \, dx\, dy = \int_{0}^{2} \left( \int_{-x^2+2x}^{-x^2+x/2+3} x^2 \, dy \right) dx = \int_{0}^{2} \left( -\frac{3}{2} x^3 + 3x^2 \right) dx = \left[ -\frac{3}{8} x^4 + x^3 \right]_{0}^{2} = 2$$

Quindi

$$\int_{A} x^2 \, dx\, dy = 2 + 2 = 4.$$

2. Sia $A$ la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,1)$ e $A_3 = (2,0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di $A$ rispetto al vertice $A_1$.

   Essendo

   $$A = \{(x,y) : y \le x \le 2 - y, 0 \le y \le 1\}$$

   si ha

   $$I_0 = \int_A (x^2 + y^2) \, dx\, dy = \int_0^1 \left( \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_y^{2-y} dy =$$
   $$= \int_0^1 \left( -\frac{8}{3} y^3 + 4y^2 - 4y + \frac{8}{3} \right) dy = \left[ -\frac{2}{3} y^4 + \frac{4}{3} y^3 - 2y^2 + \frac{8}{3} y \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

3. Sia $B$ la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $B_1 = (0,0)$, $B_2 = (0,1)$ e $B_3 = (1,0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di $B$ rispetto al vertice $B_3$.

   Risulta

   $$B = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}.$$

   Poichè la distanza del generico punto $(x,y) \in B$ dal vertice $B_3$ è $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, si ha

   $$I_{B_3} = \int_B \left( (x-1)^2 + y^2 \right) dx\, dy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( (x-1)^2 + y^2 \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left[ y(x-1)^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx =$$
   $$= -\frac{4}{3} \int_0^1 (x-1)^3 \, dx = -\frac{1}{3} [(x-1)^4]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

4. Calcolare il baricentro delle regioni di piano dotate di densità unitaria

   (a) $A = \{(x,y) : x^2 \le y \le 1\}$.

   Siano $\overline{x}_A$ e $\overline{y}_A$ le coordinate del baricentro di $A$.

   Per simmetria risulta $\overline{x}_A = 0$.

   Invece

   $$\overline{y}_A = \frac{1}{M(A)} \int_A y \, dx\, dy$$

   dove $M(A)$ è la massa di $A$.

   Poichè

   $$M(A) = \int_A dx\, dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 dy \right) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx = \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

   e

   $$\int_A y \, dx\, dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) \, dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{5},$$

   risulta $\overline{y}_A = 3/5$.

(b) $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$.
Siano $\overline{x}_B$ e $\overline{y}_B$ le coordinate del baricentro di $B$.
Per simmetria risulta $\overline{x}_B = 0$.
Invece

$$\overline{y}_B = \frac{1}{M(B)} \int_B y\ dx\, dy$$

dove $M(B)$ è la massa di $B$.
Poichè

$$M(B) = \int_B dx\, dy = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\int_B y\ dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\ dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

risulta $\overline{y}_B = 4/(3\pi)$.

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\displaystyle\int_D y^2\ dx\, dy\,, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$.
L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $x^2 + y^2 \le 1$ diventa $0 \le \rho \le 1$, mentre $y \ge 0$ diventa $\sin\theta \ge 0$, ossia $0 \le \theta \le \pi$.
L'insieme di integrazione nel piano $\rho, \theta$ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \pi\}.$$

Essendo $\rho$ lo Jacobiano della trasformazione, si ha:

$$\int_D y^2\ dx\, dy = \int_0^1 \left( \int_0^\pi \rho^3 \sin^2\theta\ d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \rho^3 \left( \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\ d\theta \right) d\rho =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[ \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_0^\pi\ d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3\ d\rho = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

(b) $\displaystyle\int_D x^2 + y^2\ dx\, dy\,, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le y \le x\}$;
L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $x^2 + y^2 \le 1$ diventa $0 \le \rho \le 1$, mentre $0 \le y \le x$ diventa $0 \le \sin\theta \le \cos\theta$, ossia $0 \le \theta \le \pi/4$.
L'insieme di integrazione nel piano $\rho, \theta$ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \pi/4\}.$$

Essendo $\rho$ lo Jacobiano della trasformazione, si ha:

$$\int_D x^2 + y^2\ dx\, dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\pi/4} \rho^3\ d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho^3\ d\rho = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

(c) $\displaystyle\int_D x^2\ dx\, dy\,, \quad D = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$.
L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ diventa $1 \le \rho \le 2$, mentre $y \ge 0$ diventa $0 \le \theta \le \pi$. L'insieme di integrazione nel piano $\rho, \theta$ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 1 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le \pi\}.$$

Essendo $\rho$ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\int_D x^2 \, dx\, dy = \int_1^2 \left( \int_0^\pi \rho^3 \cos^2\theta \, d\theta \right) d\rho = \int_1^2 \rho^3 \left( \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta \right) d\rho =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{8}\pi.$$

(d) $\displaystyle\int_D y \, dx\, dy\,, \quad D = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \le 36,\ y \ge 0\}.$

Per il calcolo dell'integrale è utile riscrivere la disequazione che definisce $D$ come

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} \le 1,$$

da cui

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} \le 1.$$

$D$ risulta quindi essere metà di una ellisse di semiassi $a = 3$ e $b = 2$. Utilizzando la trasformazione

$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

l'insieme di integrazione nel piano $\rho, \theta$ diventa il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \pi\}.$$

Essendo $6\rho$ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\int_D y \, dx\, dy = \int_0^1 \left( \int_0^\pi 12\rho^2 \sin\theta \, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 12\rho^2 [-\cos\theta]_0^\pi \, d\rho = 24 \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = 8[\rho^3]_0^1 = 8.$$

6. Sia $D$ un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in $C = (r, 0)$ e raggio $r$. Verificare la relazione $I_0 = I_C + r^2 A$, dove $I_0$ e $I_C$ sono i momenti di inerzia di $D$ rispetto a $O$ e a $C$ e $A$ è l'area di $D$.

Risulta

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_D (x^2 + y^2) \, dx\, dy \\
&= \int_D ((x - r + r)^2 + y^2) \, dx\, dy \\
&= \int_D ((x - r)^2 + 2r(x - r) + r^2 + y^2) \, dx\, dy \\
&= \int_D ((x - r)^2 + y^2) \, dx\, dy + r^2 \int_D dx\, dy + 2r \int_D (x - r) \, dx\, dy \\
&= I_c + r^2 A + 2r \int_D (x - r) \, dx\, dy \\
&= I_c + r^2 A
\end{aligned}$$

poichè per simmetria risulta

$$\int_D (x - r) \, dx\, dy = 0.$$

7. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria $C = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 9, x^2+y^2-2x \ge 0\}$.

Poichè l'insieme $C$ è invariante rispetto alla simmetria per l'origine e la funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ è pari rispetto a tale simmetria risulta

$$I_0 = \int_C (x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\int_{C'} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

dove

$$C' = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 9, x^2+y^2-2x \ge 0, y \ge 0\}.$$

L'integrale può ora essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi).$$

L'insieme di integrazione nel piano $\rho, \theta$ è quindi il seguente:

$$\{(\rho,\theta) : 2\cos\theta \le \rho \le 3, 0 \le \theta \le \pi/2\} \cup \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 3, \pi/2 \le \theta \le \pi\}.$$

Essendo $\rho$ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$I_0 = 2\Big(\int_0^{\pi/2}\left(\int_{2\cos\theta}^3 \rho^3\,d\rho\right)d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^3 \rho^3\,d\rho\right)d\theta\Big) = \Big(\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{2\cos\theta}^3 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 d\theta\Big) =$$

$$= 2\Big(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{81}{4} - 4\cos^4\theta\right)d\theta + \frac{81}{4}\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\Big) = 2\Big(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{77}{4} - 2\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\right)d\theta + \frac{81}{8}\Big) =$$

$$= 2\left[\frac{75}{4}\theta - \sin 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} + \frac{81}{4}\pi = 39\pi.$$

8. Calcolare i seguenti integrali impropri:

(a) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha}\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2\}$.

Sia

$$D_R = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le R^2\}, \qquad (R > 1)$$

allora

$$\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\int_{D_R}(x^2+y^2)^{-\alpha}\,dx\,dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\int_{D_R}(x^2+y^2)^{-\alpha}\,dx\,dy = \int_1^R\left(\int_0^{2\pi}\rho^{-2\alpha+1}\,d\theta\right)d\rho = 2\pi\int_1^R \rho^{-2\alpha+1}\,d\rho$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha}(R^{-2\alpha+2}-1) & \text{se} \quad \alpha \ne 1 \\ 2\pi\log R & \text{se} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Pertanto

$$\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha}(R^{-2\alpha+2}-1) & \text{se} \quad \alpha \ne 1 \\ 2\pi\log R & \text{se} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

e quindi l'integrale diverge positivamente se $\alpha \le 1$, vale $\pi/(\alpha-1)$ se $\alpha > 1$.

(b) $\displaystyle\int_D \frac{xy}{(x^4+y^4)}\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) : 4 \le x^2+y^2, x \ge 0, y \ge 0\}$;

Sia

$$D_R = \{(x,y) : 4 \le x^2+y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\}, \qquad (R > 2)$$

allora

$$\int_D \frac{xy}{(x^4+y^4)}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\int_{D_R}\frac{xy}{(x^4+y^4)}\,dx\,dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\int_{D_R} \frac{xy}{(x^4+y^4)}\,dx\,dy = \int_2^R \left( \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho} \frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}\,d\theta \right) d\rho =$$

$$= \left( \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}\,d\theta \right) \left( \int_2^R \frac{1}{\rho}\,d\rho \right) == \frac{\pi}{4}(\log R - \log 2).$$

Pertanto

$$\int_D \frac{xy}{(x^4+y^4)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4} \lim_{R\to+\infty} (\log R - \log 2) = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge positivamente.

(c) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,,\ D = \{(x,y) : x^2+y^2 \ge 1, x \ge 0, y \ge 0\}.$

Sia

$$D_R = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\}, \qquad (R > 1)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} \int_{D_R} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\int_{D_R} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_1^R \left( \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^2}\cos\theta\,d\theta \right) d\rho = \int_1^R \frac{1}{\rho^2}[\sin\theta]_0^{\pi/2}\,d\rho =$$

$$= \int_1^R \frac{1}{\rho^2}\,d\rho = \left[ -\frac{1}{\rho} \right]_1^R = 1 - \frac{1}{R}.$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} \left( 1 - \frac{1}{R} \right) = 1.$$

(d) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,,\ D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1, 0 \le y \le x\}.$

Sia

$$D_\epsilon = \{(x,y) : \epsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1, 0 \le y \le x\}, \qquad (\epsilon > 0)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_\epsilon^1 \left( \int_0^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta \right) d\rho = \int_\epsilon^1 [\sin\theta]_0^{\pi/4}\,d\rho == \frac{\sqrt{2}}{2} \int_\epsilon^1 \,d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\epsilon).$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\epsilon\to0^+} (1-\epsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(e) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,,\ D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1, -x \le y \le 0\}.$

Sia

$$D_\epsilon = \{(x,y) : \epsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1, -x \le y \le 0\}, \qquad (\epsilon > 0)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_\epsilon^1 \left( \int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{\rho^2}\cos\theta\,d\theta \right) d\rho = \int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^2}[\sin\theta]_{-\pi/4}^0\,d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^2}\,d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ -\frac{1}{\rho} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right).$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\epsilon\to0^+} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge positivamente.